
• Infinite Loop
• Mariani Ave
• Valley Green
• Bandley Dr
• De Anza Blvd

PŘEDNÁŠKA KURZU MPC-POV

Klasifikátory, strojové učení, automatické třídění

P. Petyovský (email: petyovsky@vut.cz)
kancelář SD3.152, Technická 12, VUT v Brně

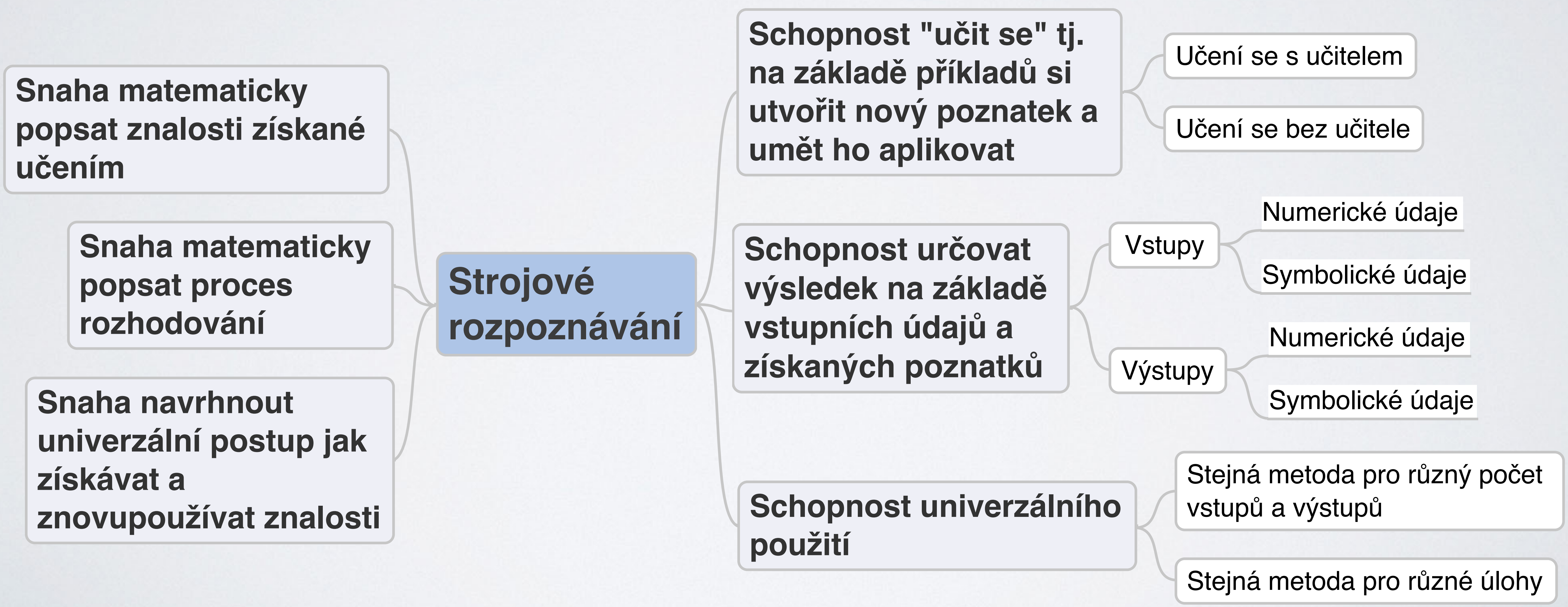
Computer Vision Group
Department of Control and Instrumentation
Faculty of Electrical Engineering and Communications
Brno University of Technology

rev. 2022.9

- Motivace strojového učení
- Základní pojmy
  - Strojové učení, znalost, inference, klasifikátor
- Příklady klasifikačních metod
  - Lineární klasifikátor
  - Bayesův klasifikátor
- Zlepšení přesnosti klasifikace - Boosting
  - Metoda AdaBoost
- Principal components analysis (PCA, LDA)
- Markovovy modely
- Literatura, použité obrázky

MOTIVACE

Jak definovat pojem strojové učení/rozpoznávání?

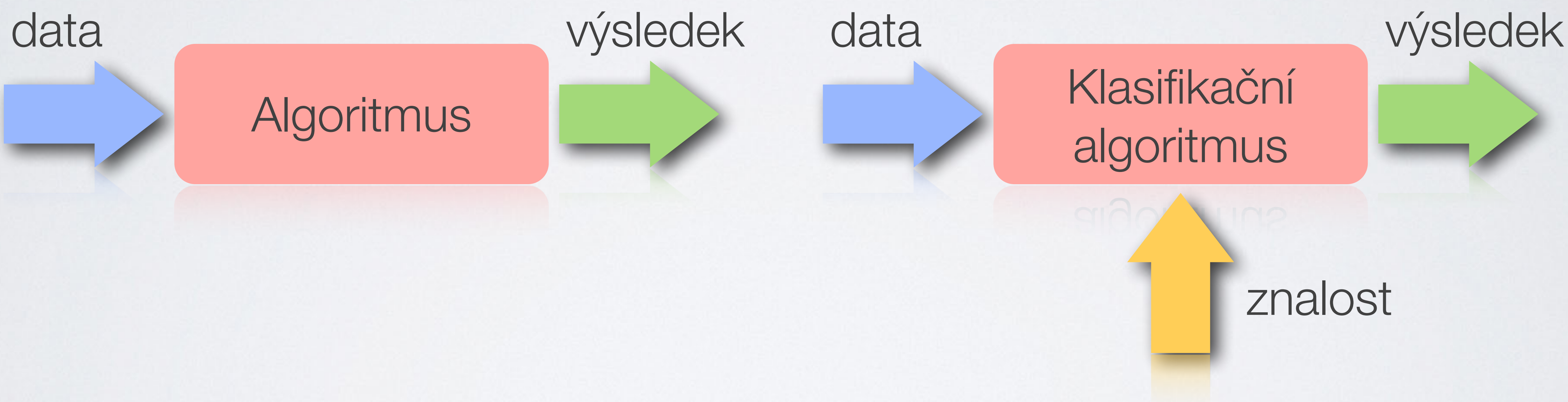


ZÁKLADNÍ POJMY

Strojové učení

Strojová klasifikace "pattern recognition".

Nauka o získávání a zpracování znalostí.



Obr. 1 – Srovnání přístupu ke klasickému zpracování dat a při strojové klasifikaci

ZÁKLADNÍ POJMY

Znalost
Informace o dané problematice. Další rozdělení:

- **Mělká znalost** – vychází z pozorování skutečnosti, povrchní popis jevů.
- **Hloubková znalost** – vyjadřuje vnitřní zákonitosti jevů (např. Ohmův zákon).
- **Deklarativní znalost** – lze formálně zapsat jako pravidla (např. pravidla dopravního provozu vozidel, pro hraní šachu).
- **Procedurální znalost** – znalost získaná opakovaným prováděním, cvičením (např. řízení vozidla, hraní šachu).
  Pozn.: Taková znalost obsahuje mnoho aspektů, pro potřeby strojového učení obtížně využitelné. (strategie, typické varianty atd.)

ZÁKLADNÍ POJMY

Inference
Postup k dosažení výsledku – odvození.
Základní typy inference jsou: dedukce, abdukce, indukce.

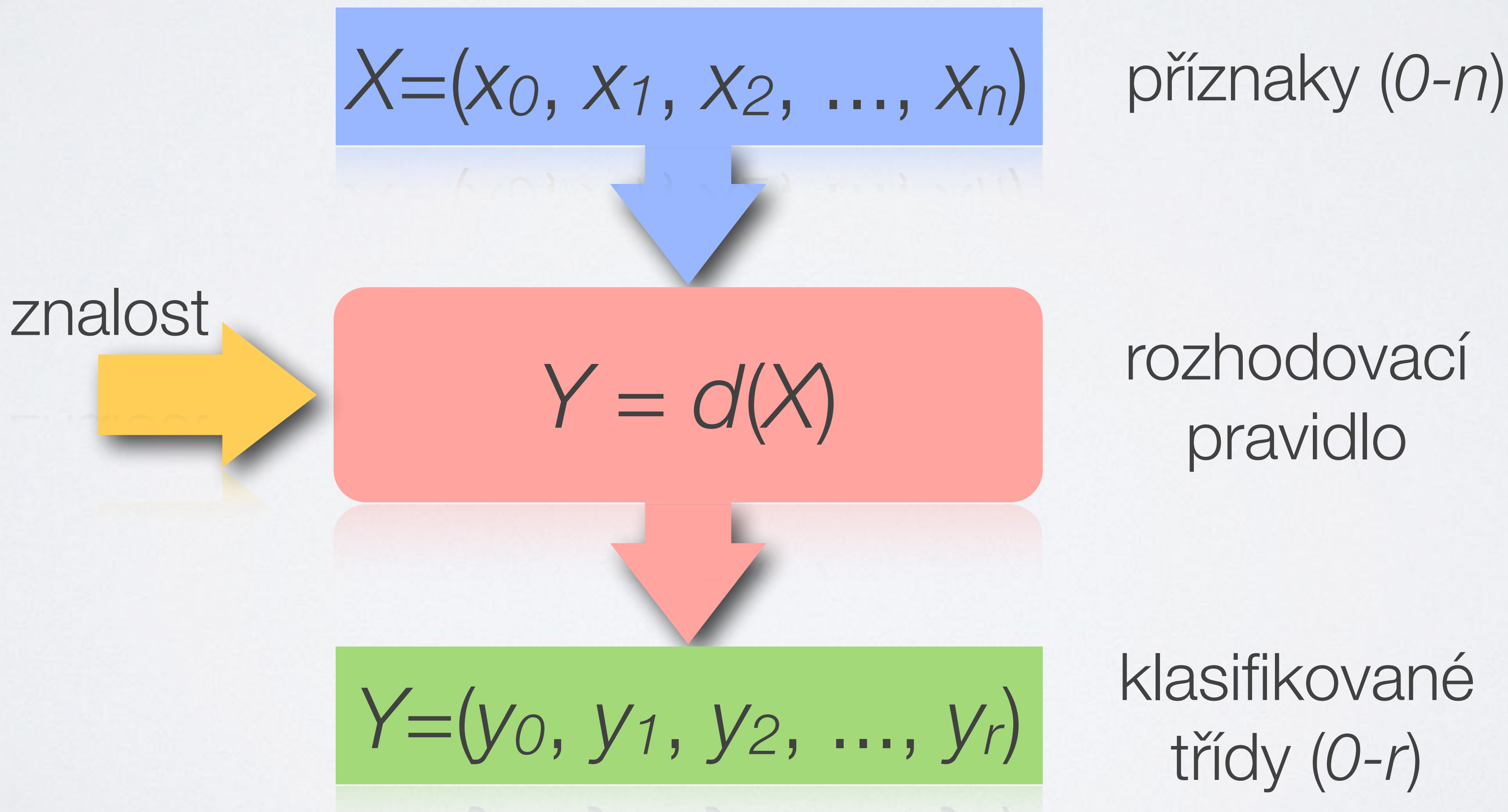
$$\mathbf{F}\text{acts} \xrightarrow{\mathbf{T}\text{heory}} \mathbf{C}\text{onclusion}$$

- **Dedukce** – pokud známe ***F***, ***T*** a určujeme ***C***. Vždy jistý správný výsledek (s ohledem na správnost ***T***) (např. ***T***: $y=x^2$; ***F***:$x=2$ → ***C***:$y=4$).
- **Abdukce** – proces, kdy známe ***C***, ***T*** a hledáme ***F***. Není vždy zaručen správný výsledek (např. ***T***: $y=x^2$; ***C***:$y=9$ → ***F***:$x=3$ nebo $x=-3$?).
- **Indukce** – proces, kdy známe ***F***, ***C*** a hledáme ***T***. Není zaručen správný výsledek (např. ***F***:$x=3$; ***C***:$y=9$ → ***T***: $y=x^2$, $y=3x$, $y=6+x$, atd..??)

ZÁKLADNÍ POJMY

Klasifikátor

Je algoritmus, který je při vhodné množině znalostí schopen úspěšně rozdělovat vstupní data s hodnotami atributů (příznaků) do výstupních předem zvolených skupin (tříd). Vhodná volba klasifikačního algoritmu představuje nutnou podmínku k úspěšné klasifikaci.



Obr. 2 - Vstupy a výstupy klasifikátoru

ZÁKLADNÍ POJMY

Úkoly strojového učení

Zvolit, ověřit a implementovat:

- Vhodné příznaky,
- Klasifikační metodu,
- Metodu učení, vyhodnocení chyb klasifikace,
- Interpretaci výsledků učení,
- Realizaci klasifikátoru v cílové aplikaci.

ZÁKLADNÍ POJMY

Postup použití vhodné klasifikační metody:

1. Učení – generování znalostí (modelu) s ohledem na typ klasifikátoru.
2. Ověřování – verifikace znalostí na jiných datech, než byly použity při učení a výpočet přesnosti klasifikace.
3. Klasifikace – běžný provoz naučeného klasifikátoru.

ZÁKLADNÍ POJMY

Určení přesnosti klasifikace

Lze ji vyjádřit jako procentuální poměr mezi počtem správně zařazených vzorů k počtu všech předložených vzorů v testovací množině.

$$\delta_{klas} = 100 \cdot \frac{N_{ok}}{N_{celk}} \quad [\,\%\,]$$

Pozn.:
V případě, že počet výstupních tříd klasifikátoru je roven dvěma (ano / ne), jedná se o tzv. úlohy dichotomické klasifikace.
Pro dichotomické úlohy představuje chyba klasifikace 50% tzv. nenaučený klasifikátor (tj. klasifikátor odpovídající na předložené vzory naprosto náhodně).

ZÁKLADNÍ POJMY

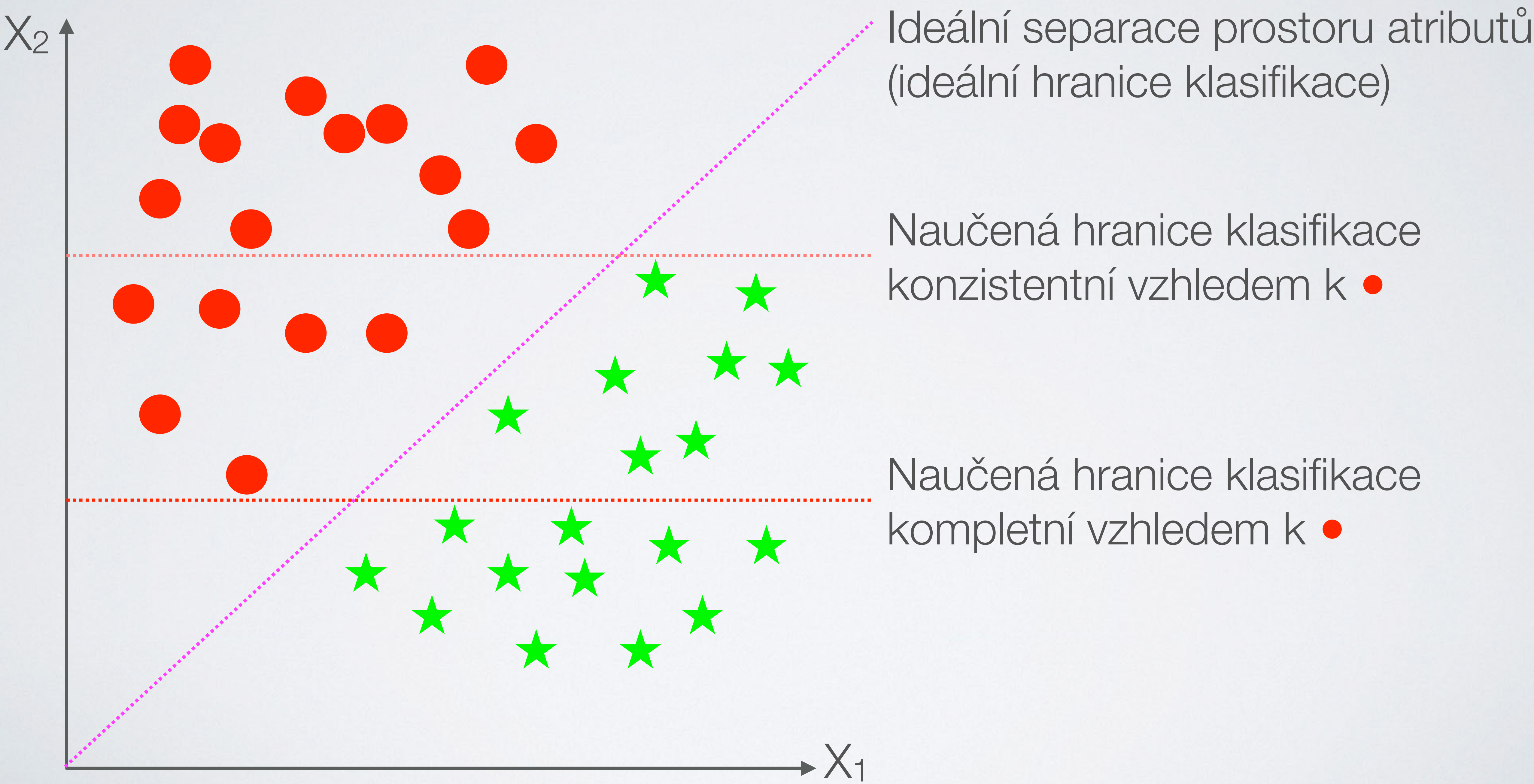
Kompletní a konzistentní model znalostí klasifikátoru

Tyto pojmy představují popis modelu vzhledem k určité třídě:

- **Kompletní model** – Učením vzniklá množina znalostí pokrývá všechny pozitivní případy, ale možná i některé negativní.
- **Konzistentní model** – Učením vzniklá množina znalostí nepokrývá žádný negativní případ, ale možná nepokrývá i některé pozitivní.

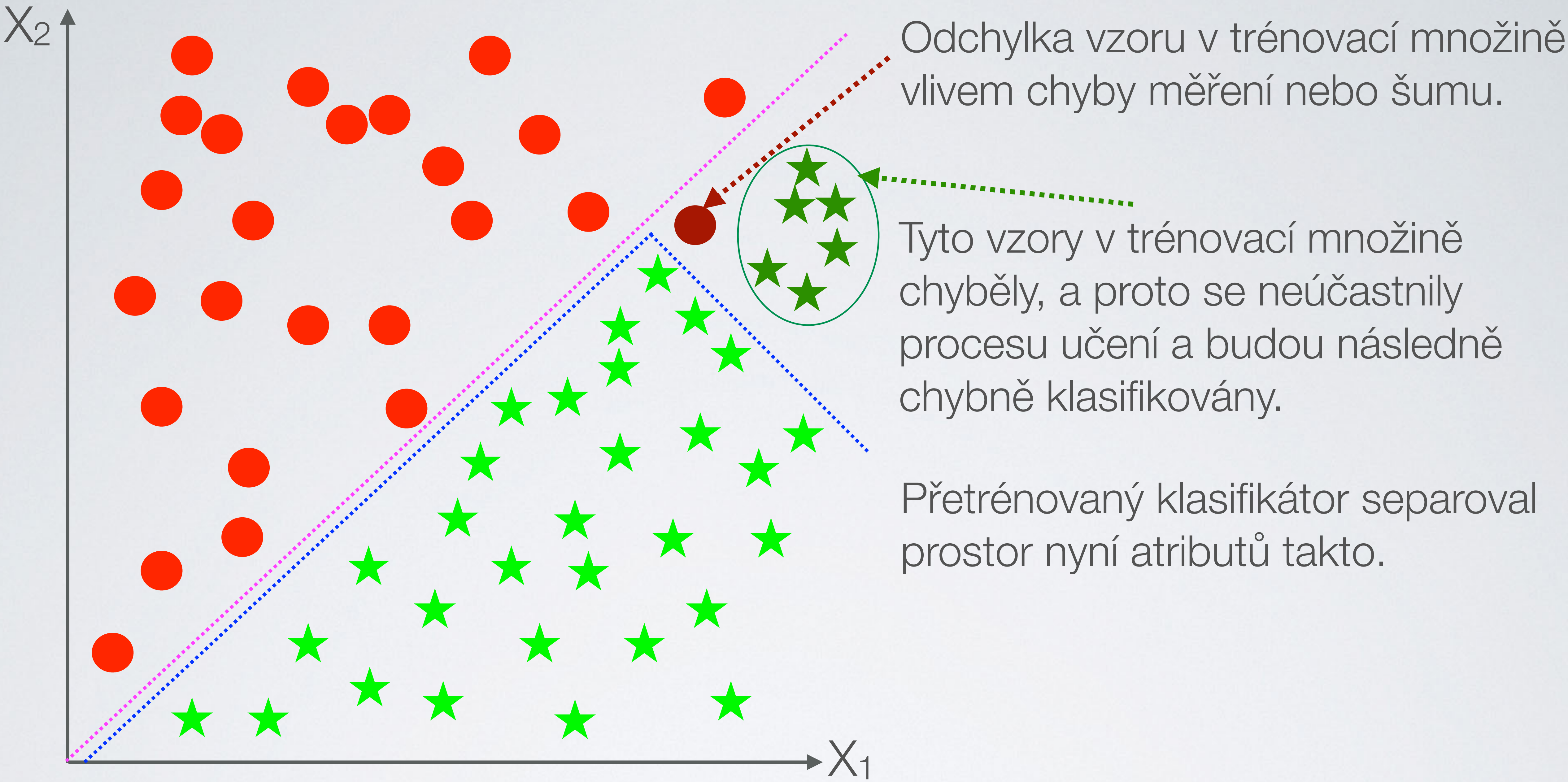
ZÁKLADNÍ POJMY

Kompletní a konzistentní model znalostí klasifikátoru



Obr. 3 - Kompletní a konzistentní model znalostí

Přetrénování “over-fitting” klasifikátoru



Obr. 4 - Problém přetrénování klasifikátoru

Na obrázku je patrný problém přetrénování klasifikátoru. Je tedy lépe netrvat na konzistenci (případně úplnosti) popisu, pokud to není nutné (brát ohled na aplikaci). Příliš přesný popis vzhledem k trénovací množině má velmi často nižší přesnost vzhledem k reálným datům.

ZÁKLADNÍ ROZDĚLENÍ KLASIFIKÁTORŮ

Dle charakteru učení:

- **Dávkové** – Zpracuje vždy celou cvičnou množinu naráz. Typické pro symbolické metody klasifikace.

- **Inkrementální** – Cvičné příklady lze dodávat postupně, naučená znalost se podle nich průběžně aktualizuje. Typické pro statistické metody klasifikace.

- **Inkrementální se zapomínáním** – Zapomínání částí znalostí se může jevit jako výhodné v případě, kdy je některý významný atribut skryt nebo jsou některé hodnoty atributů cvičné množiny zatíženy šumem více než jiné.

ZÁKLADNÍ ROZDĚLENÍ KLASIFIKÁTORŮ

Dle použitých metod klasifikace:

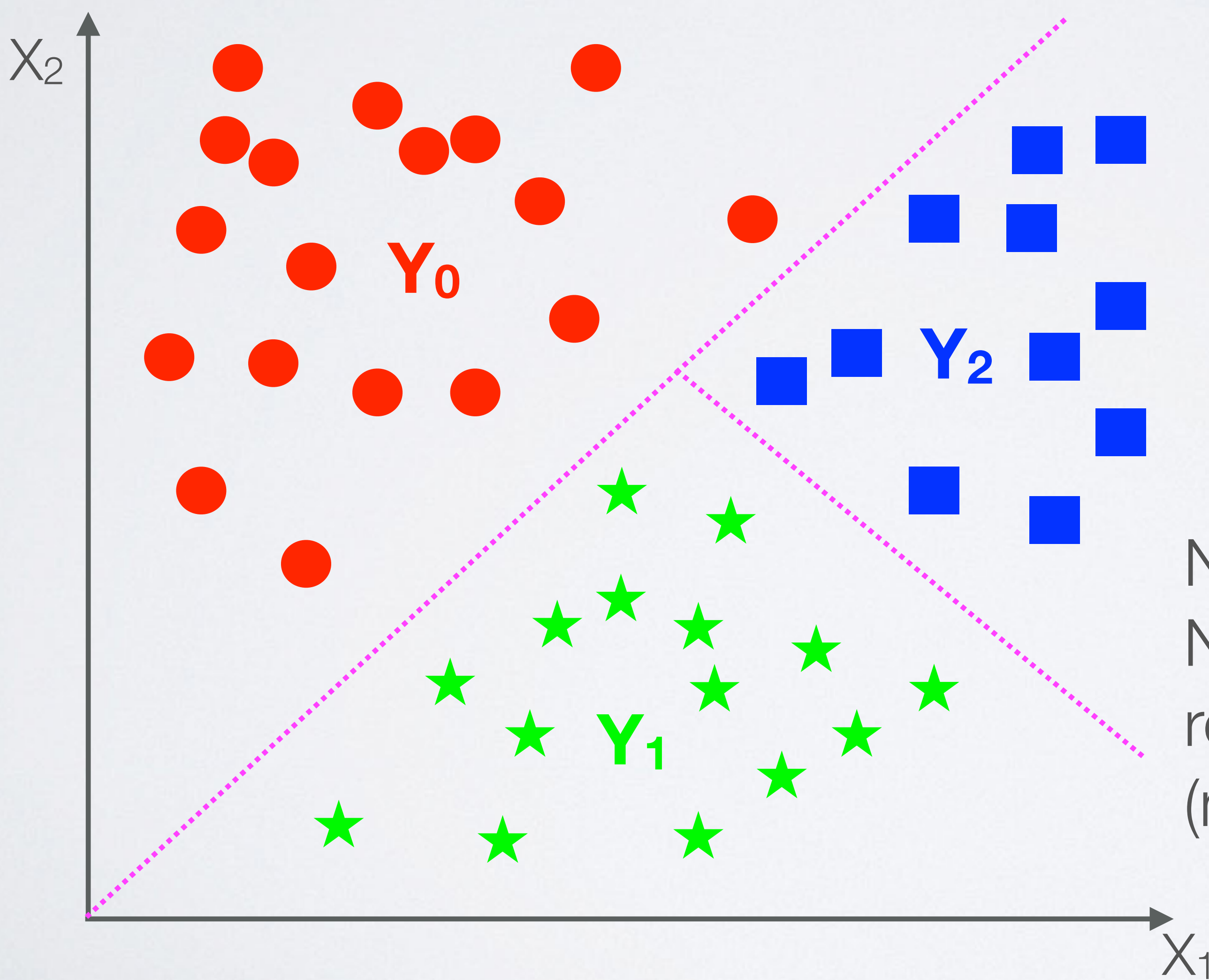
- **Symbolické** – Metody založené na rozhodovacích stromech (např. ID3, C4.5).
- **Subsymbolické** – nebo také “biologicky inspirované” metody (např. neuronové sítě, genetické algoritmy).
- **Statistické** – využívající regresní nebo jiné statistické metody (např. Bayesův odhad).
- **Paměťové** – metody založené na ukládání instancí tříd (např. IBL).

PŘÍKLADY METOD KLASIFIKACE

- Lineární klasifikátor
- Bayesův klasifikátor
- Boosting metody pro klasifikaci
- Předzpracování prostoru příznaků (PCA, LDA)
- Markovovy modely

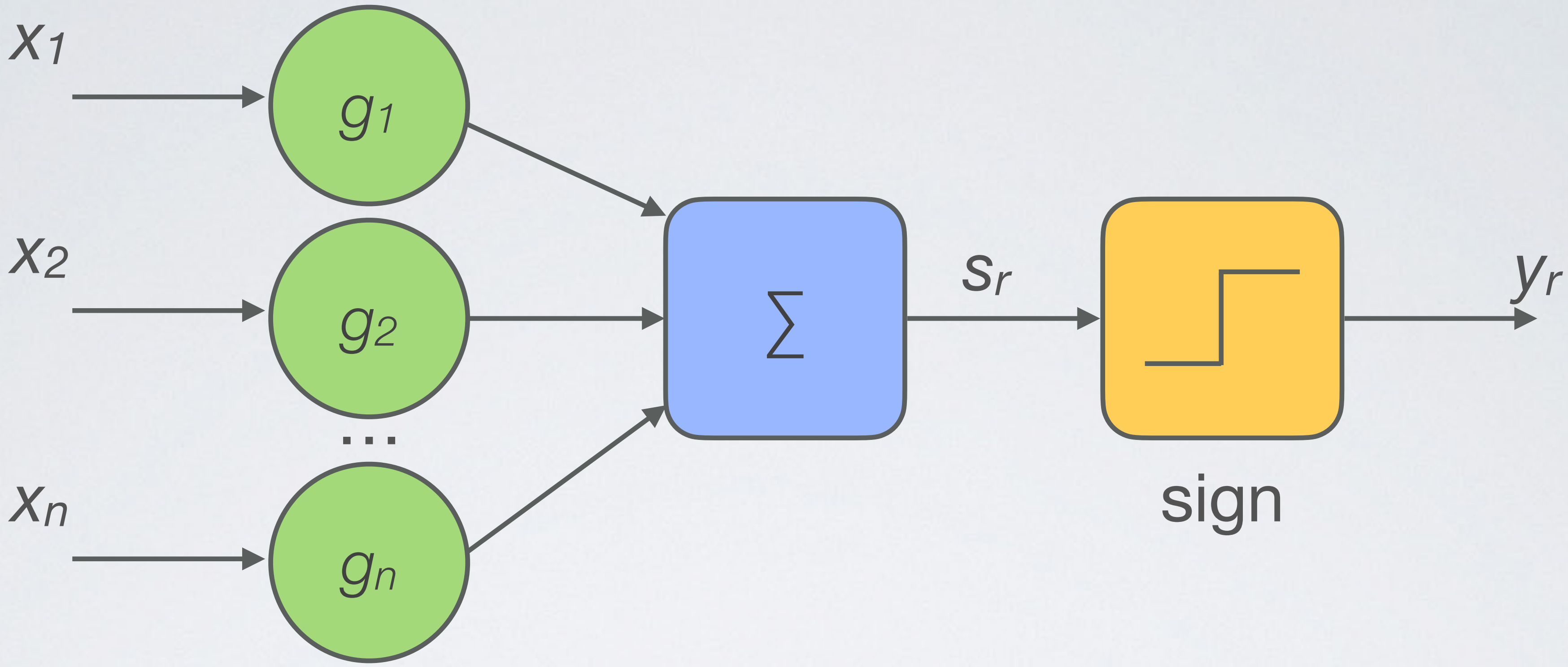
LINEÁRNÍ KLASIFIKÁTOR

Představuje základní klasifikační metodu založenou na rozdělení prostoru příznaků pomocí po částech lineárními úseky.
Prostor příznaků je obecně prostor s mnoha dimenzemi proto hovoříme o separaci prostoru příznaků nadrovinami (popř. nadplochami).



Naučená hranice klasifikace. Naučená znalost představuje rozdělující nadroviny (nadplochy).

Obr. 5 - Příklad lineárně separabilního prostoru příznaků



Obr. 6 - Schéma lineárního klasifikátoru

$$s_r = g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_n x_n$$

Úkolem učení klasifikátoru je zvolit vhodné konstanty $g_1, \ldots, g_n$ (případně parametry funkce **sign**).

Pokud lze tuto podmínku separace prostoru (na lineární oblasti patřící do jedné třídy) splnit (při chybě klasifikace 0%), hovoříme o **lineární separabilitě prostoru příznaků**.

Návrh lineárního klasifikátoru je možné si také představit jako výběr vhodného reprezentanta třídy v prostoru příznaků (tzv. *etalon*, *normál*).

Proces učení potom představuje výběr vhodného etalonu zastupujícího celou třídu.

Proces klasifikace neznámého vzoru lze v tomto případě převést na hledání nejmenší vzdálenosti neznámého vzoru od některého z etalonů tříd. Neznámý vzor je následně klasifikován do té třídy, od které má nejmenší vzdálenost. Funkce pro určení míry vzdálenosti se nazývá **diskriminační funkce**, a má nejčastěji tvar Eukleidovské vzdálenosti (metriky).

$$\|\overrightarrow{V_s} - \overrightarrow{X}\| = \sqrt{\left(\overrightarrow{V_s} - \overrightarrow{X}\right)^T \cdot \left(\overrightarrow{V_s} - \overrightarrow{X}\right)}$$

Kde $\boldsymbol{V_s}$ představuje informaci o poloze s-tého etalonu v prostoru příznaků. $\boldsymbol{X}$ představuje informaci o poloze klasifikovaného vzoru.

Úkolem je nalézt minimum vzdálenosti od některého z etalonů:

$$\|\overrightarrow{V_s} - \overrightarrow{X}\| = \sqrt{\left(\overrightarrow{V_s} - \overrightarrow{X}\right)^T \cdot \left(\overrightarrow{V_s} - \overrightarrow{X}\right)}$$

$$\min \|\overrightarrow{V_s} - \overrightarrow{X}\|^2 = \min \left(\overrightarrow{V_s}^T \cdot \overrightarrow{V_s} - 2 \cdot \left(\overrightarrow{V_s}^T \cdot \overrightarrow{X}\right) + \overrightarrow{X}^T \cdot \overrightarrow{X} \right) = \quad \dots$$

$$\dots \quad = \overrightarrow{X}^T \cdot \overrightarrow{X} - 2 \cdot \max \left(\overrightarrow{V_s}^T \cdot \overrightarrow{X} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V_s}^T \cdot \overrightarrow{V_s}\right) \right)$$

Výraz $\overrightarrow{X}^T \cdot \overrightarrow{X}$ má pro každý z etalonů konstantní hodnotu, proto ho lze při výpočtu maxima odstranit (pozn. stejně tak i násobení výsledku konstantou). Výsledná diskriminační funkce lze tedy zapsat ve tvaru:

$$\min \|\overrightarrow{V_s} - \overrightarrow{X}\|^2 = \min \left(\overrightarrow{V_s}^T \cdot \overrightarrow{X} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V_s}^T \cdot \overrightarrow{V_s}\right) \right)$$

Hodnota výrazu $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V_s}^T \cdot \overrightarrow{V_s}\right)$ závisí pouze na poloze daného etalonu, proto je možné ji v rámci zrychlení klasifikace vypočítat předem a uložit společně s informacemi o poloze etalonu v prostoru příznaků.

Úprava pro dichotomické úlohy

Pro dichotomické úlohy klasifikace není nutné vyhodnocovat hodnoty diskriminační funkce vždy pro oba etalony.
Stačí vyhodnotit rozdíl obou diskriminačních funkcí a klasifikovat vzor na základě znaménka toho rozdílu.

$$\operatorname{sign}\left((\overrightarrow{V_0}^T - \overrightarrow{V_1}^T) \cdot \overrightarrow{X} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{V_0}^T \cdot \overrightarrow{V_0} - \overrightarrow{V_1}^T \cdot \overrightarrow{V_1}) \right)$$

BAYESŮV KLASIFIKÁTOR

Patří do skupiny statistických klasifikátorů, umožňuje inkrementální i dávkové učení.

Naučená znalost (model) je reprezentován pravděpodobnostním rozložením tříd. **Při klasifikaci je zvolena třída s nejvyšší pravděpodobností**.

Podmíněná pravděpodobnost závislá na konjunkci jevů se nahradí funkcí podmíněných pravděpodobností jednoduchých jevů. Proto metoda požaduje **úplnou vzájemnou statistickou nezávislost atributů**.

BAYESŮV KLASIFIKÁTOR

Proces učení:

Pro třídy C_i, příznaky A_j a jejich hodnoty $V_{j,k}$ (tzn. k-tá hodnota j-tého příznaku) se zaznamená do tabulky (představující vytvářenou znalost), kolikrát se ve cvičné množině:

$V_{i,j,k}$ - vyskytl jev, kdy platí současně že: třída C_i a hodnota $V_{j,k}$ (přesněji $A_j = V_{j,k}$)

Pro klasifikaci jsou dále ukládány tyto hodnoty:

T_i - počet případů třídy C_i,
$T_{j,k}$ - počet případů, kdy ($A_j = V_{j,k}$),
T - celkový počet případů.

BAYESŮV KLASIFIKÁTOR

Proces klasifikace:

Za předpokladu, že neznámá instance má hodnoty: $V_{1,a}, V_{2,b}, \dots, V_{N,q}$, je pravděpodobnost, že instance patří do výstupní třídy C_i, určena podmíněnou pravděpodobností: $P(C_i \mid V_{1,a}, V_{2,b}, \dots, V_{N,q})$.

Pro empirické získaní této pravděpodobnosti obvykle nejsou k dispozici potřebná a dostatečná trénovací data.

Proto se tato pravděpodobnosti vypočítá na základě dílčích empirických pravděpodobností: $P(C_i \mid V_{j,k})$ resp. $P(V_{j,k} \mid C_i)$.

BAYESŮV KLASIFIKÁTOR

Pro dostatečně velká čísla (T, $N_{i,j,k}$, $T_{j,k}$, T_i):

$$P(C_i) = \frac{T_i}{T} \qquad (1)$$

$$P(V_{j,k}) = \frac{T_{j,k}}{T} \qquad (2)$$

$$P(C_i \mid V_{j,k}) = \frac{N_{i,j,k}}{T_{j,k}} \qquad (3)$$

$$P(V_{j,k} \mid C_i) = \frac{N_{i,j,k}}{T_i} \qquad (4)$$

Za předpokladu nezávislosti atributů, lze dosadit za (kde N je počet příznaků) :

$$P(C_i \mid V_{1,a}, V_{2,b}, \ldots, V_{N,q}) = P(C_i) \cdot \prod_{j=1}^{N} \frac{P(C_i \mid V_{j,k})}{P(C_i)} \qquad (5)$$

nebo:

$$P(C_i \mid V_{1,a}, V_{2,b}, \ldots, V_{N,q}) = P(C_i) \cdot \prod_{j=1}^{N} \frac{P(V_{j,k} \mid C_i)}{P(V_{j,k})} \qquad (6)$$

BAYESŮV KLASIFIKÁTOR

Modifikovaná varianta výpočtu:

Obecněji lze (1) a (3) nahradit heuristikami (dle Cestnik, ECAI - 90):

$$P(C_i) = \frac{T_i + 1}{T + M} \qquad (1.1)$$

$$P(C_i \,|\, V_{j,k}) = \frac{N_{i,j,k} + M \cdot P(C_i)}{T_{j,k} + M} \qquad (3.1)$$

Vhodné pro případy, kdy v trénovací množině není zastoupena některá třída, hodnota příznaku nebo třída s hodnotou příznaku.

M - nutno nastavit experimentálně, (doporučeno $M = 2$).

BAYESŮV KLASIFIKÁTOR

Příklad: nastartování vozidla

baterie: {***P*** / ***W***} (*Powered* - nabitá / *Weak* - slabá)

kontakty: {***C*** / ***D***} (*Clean* - čisté, *Dirty* - znečistěné)

výstupní třída: {+/**-**} (+ nastartovalo / **-** nenastartovalo)

baterie	kontakty	vozidlo
P	***C***	+
P	***D***	+
P	***C***	-
W	***C***	+
P	***D***	+
W	***C***	+
P	***D***	-
P	***D***	+
W	***D***	-
W	***C***	+

	$N_{i,j,k}$ třída +	$N_{i,j,k}$ třída -	$T_{j,k}$ (hodnota)
baterie ***P***	4	2	6
baterie ***W***	3	1	4
kontakty ***C***	4	1	5
kontakty ***D***	3	2	5
T_i (třídy)	7	3	10

Jaká je pravděpodobnost nastartování vozidla v případě, že baterie je slabá (*W*) a kontakty jsou znečištěné (*D*) dle (5) ?

$$P(+\,|\,W,D) = P(+)\cdot\frac{P(+\,|\,V_{baterie,W})}{P(+)}\cdot\frac{P(+\,|\,V_{kontakty,D})}{P(+)} = \quad \dots \quad = 64.3\,\%$$

$$P(-\,|\,W,D) = \quad \dots \quad = 33.3\,\%$$

Pozn.: Z výsledných pravděpodobností opačných jevů je patrné, že trénovací množina nesplňuje dokonale podmínku statistické nezávislosti příznaků.

BOOSTING

Zlepšení přesnosti klasifikace - Boosting

Boosting metody představují tzv. meta algoritmy učení tj. metody jak co nejlépe učit klasifikátory. Boosting zavádí pojem *weak learner* (špatný žák) tj. klasifikátor který má jen o “něco” lepší úspěšnost klasifikace než klasifikátor, který klasifikuje naprosto nahodile (tj. nenaučený klasifikátor).

Boosting metody jak spojit více špatných (žáků) klasifikátorů jednoho tzv. úspěšnějšího klasifikátoru (tzv. ***Strong classifier***). Metoda tedy představuje “vylepšené” učení využívající obecně mnoha klasifikátorů učených nad stejnými vstupními daty.

ADABOOST

Adaptive Boosting:
1999 - Yoav **Freund**, Robert **Schapire**, (obdrželi za AdaBoost Gödelovu cenu)

Určena pro dichotomické úlohy klasifikace.

Je definována trénovací množina:

$$(x_1, y_1),\ \ldots\ldots\ ,(x_m, y_m);\ x_i \in X;\ y_i \in Y \mapsto \{-1, +1\}$$

Je definována množina špatných žáků (klasifikátorů):

$$h_t :\ X \mapsto \{-1, +1\};\ h_t \in H$$

Hledám výsledný klasifikátor *K(x)* (tzv. Strong classifier) ve tvaru:

$$K(x) = \operatorname{sign}\Big(\sum_{t=1}^{T} \alpha_t h_t(x)\Big)$$

ADABOOST

Vlastnosti, výhody a nevýhody metody

Výhody:

- Jednoduchá metoda (lze implementovat i v HW),
- Neklade "prakticky" žádné požadavky na klasifikátory (jen podmínku o „*weak learner*").

Nevýhody:

- Velká citlivost na šum,
- Citlivost na přeučení (over-fitting).

Popis algoritmu metody AdaBoost

0) Inicializace:

$$D_1(i) = \frac{1}{m}; \qquad i = 1, \dots , m$$

$$t = 1, \dots , T$$

1) Hledáme klasifikátor:

$$h_t : \; X \mapsto \{-1, +1\}; \; h_t \in H$$

který vykazuje nejmenší chybu klasifikace vzhledem k váhám $\boldsymbol{D_t}(i)$

$$h_t = \arg_{h_t \in H} \left(\min(\epsilon_t) \right)$$

$$\epsilon_t = \sum_{i=1}^{m} D_t(i) \mathrm{bool}\left(y_i \neq h_t(x_i) \right)$$

Pozn.: **bool()** představuje funkci vracející 1 nebo 0 dle vyhodnocené podmínky (platí/neplatí).

2) Pokud $\epsilon_t < 0.5$ pokračuj, jinak ukonči učení.

3) Urči váhu klasifikátoru α_t, dle:

$$\alpha_t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - \epsilon_t}{\epsilon_t} \right)$$

$$\alpha_t = \mathbb{R}$$

4) Přepočítej váhy trénovací množiny dle:

$$D_{t+1}(i) = \frac{D_t(i) e^{-\alpha_t y_i h_t(x_i)}}{Z_t}$$

$$Z_t = \sum_{i=1}^{m} D_t(i) e^{-\alpha_t y_i h_t(x_i)}$$

5) Opakuj 1,
(dokud platí podmínka ve 2)

PŘEDZPRACOVÁNÍ PŘÍZNAKŮ

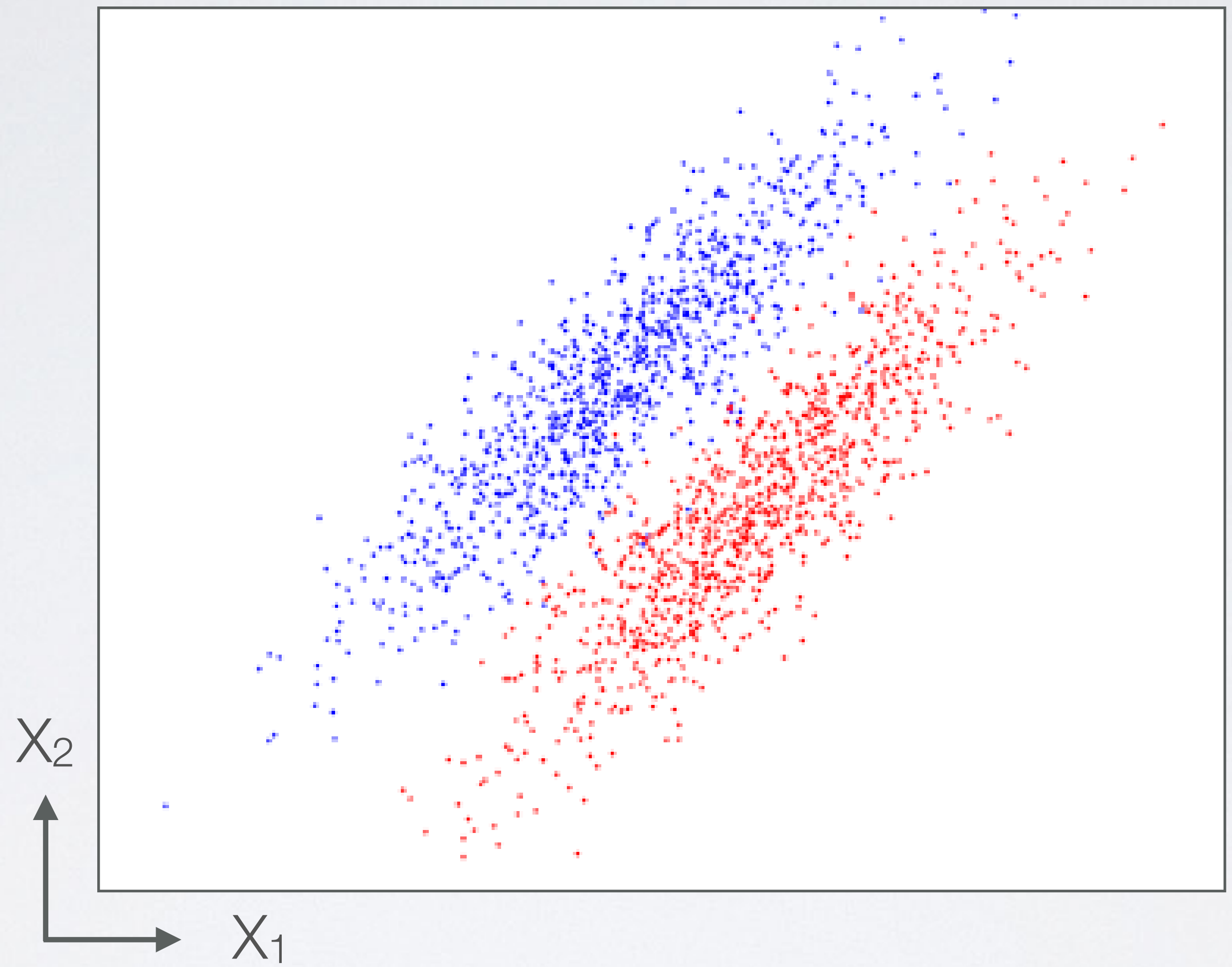
Normalizace, regularizace, transformace prostoru příznaků
Využitelná k omezení dimenze a transformaci prostoru příznaků ještě před vstupem do klasifikátoru.

Principal components analysis (PCA), Linear discriminant analysis (LDA)
Patří do skupiny operací pro předzpracování příznaků, využívá faktorovou analýzu dat.

Definujme pojmy: *eigenvector, eigenspace*.

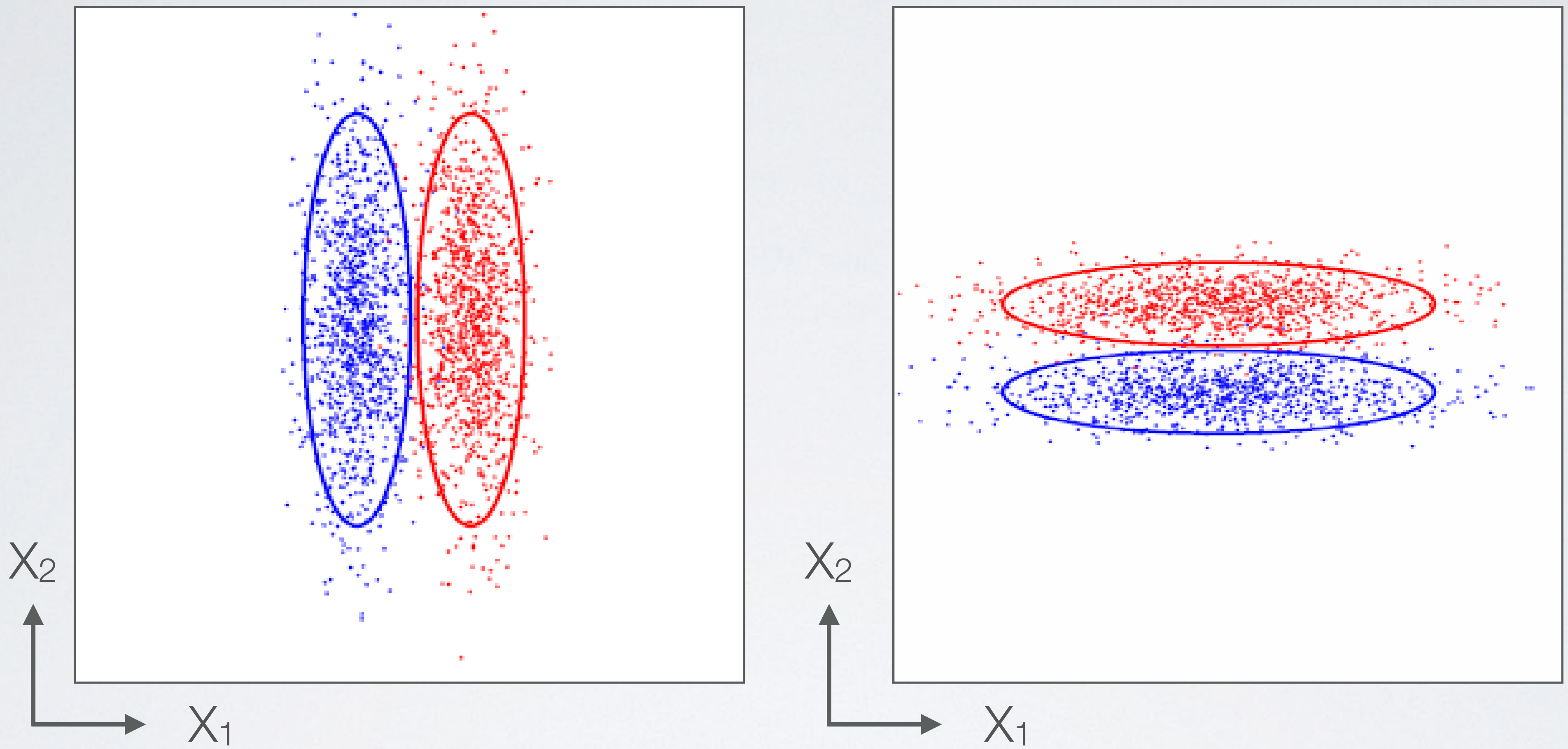
Principem metody je volba nejdůležitějších proměnných popisující dostatečně dané třídy. Na základě hledání vhodných statických veličin.

Na obrázku vidíme závislost X_1 a X_2 pro dvě odlišné třídy. Pro daná X_1 a X_2 je víceméně jednoznačně patrná třída, ale pro správné přiřazení je potřebná znalost obou proměnných.



Obr. 7 - Příklad normalizovatelného prostoru příznaků

Správnou volbou transformace souřadnicového systému dokážeme získat informaci, zda daný prvek patří do té či oné třídy již z jedné proměnné nebo naopak dokážeme uchovat v jedné proměnné maximum dat.

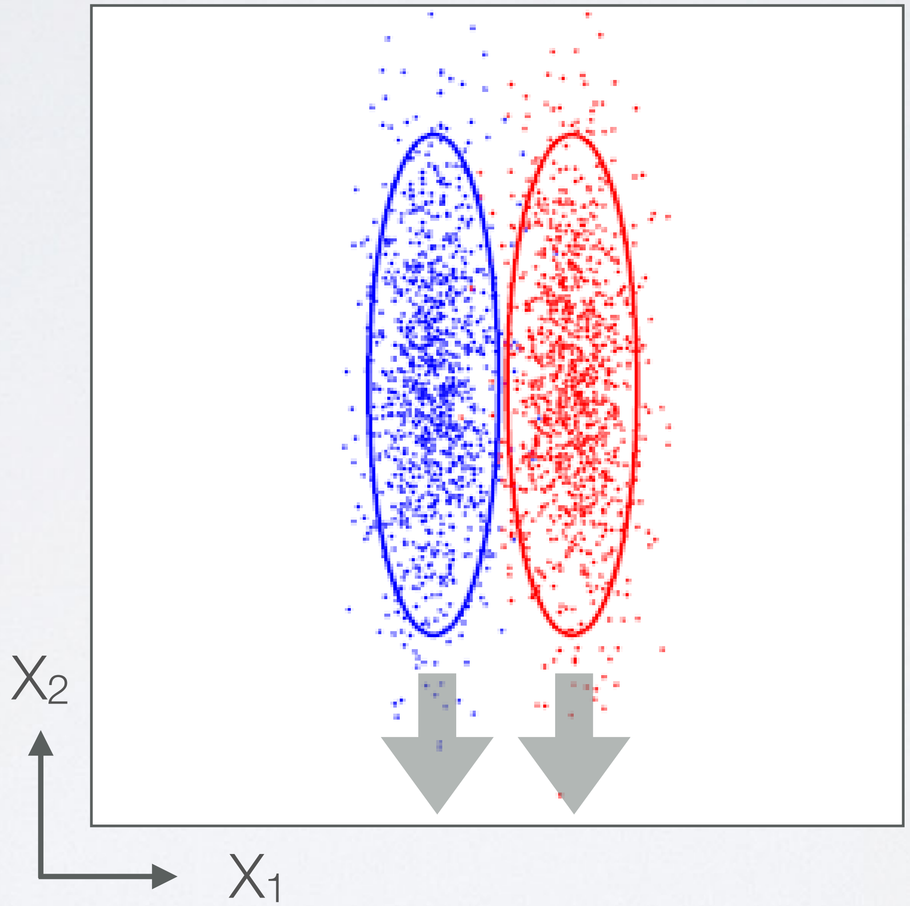


Obr. 8 - Příklad normalizace prostoru příznaků a), b)

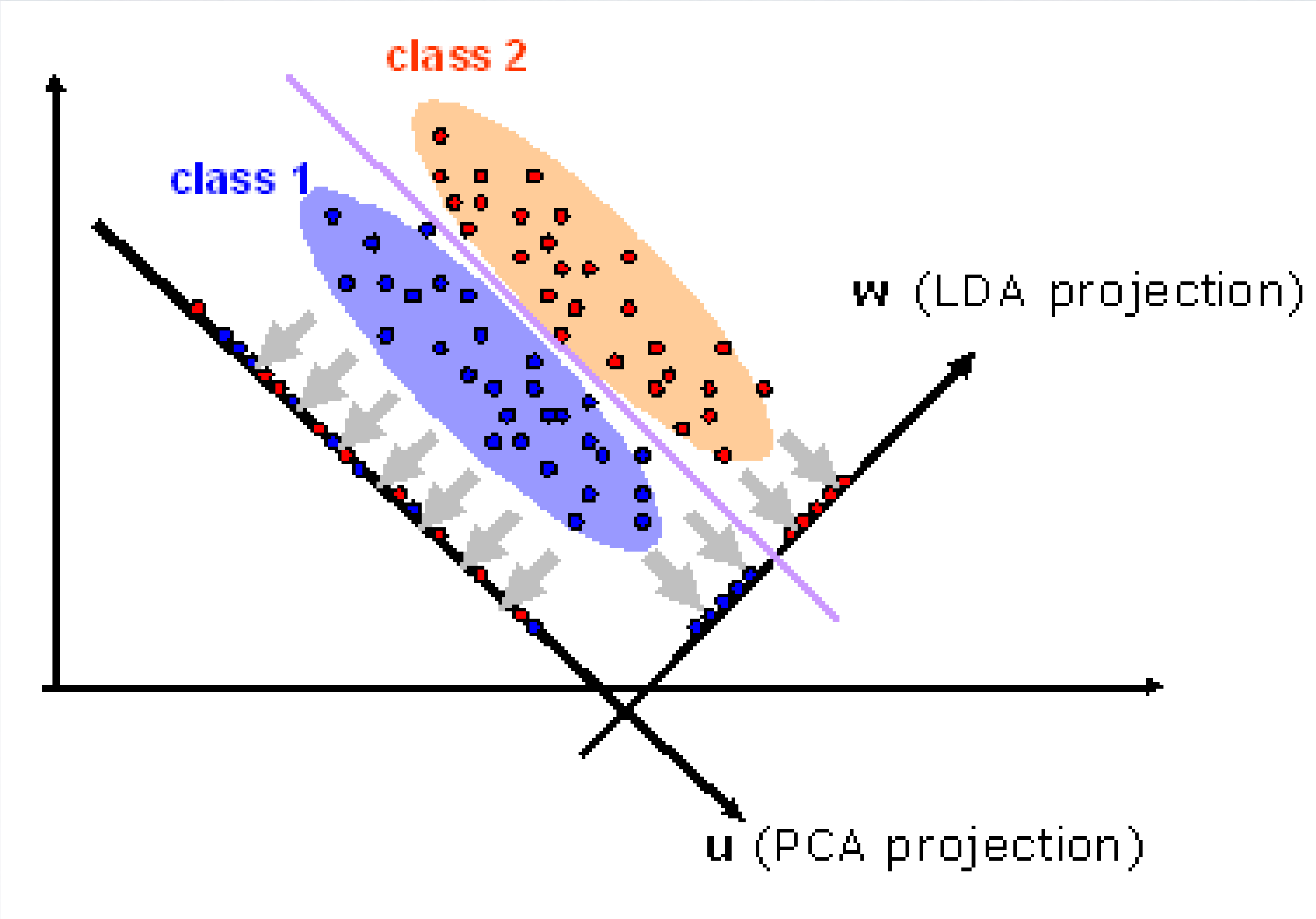
Existují dvě možnosti jak vhodně „rotovat“ souřadnicový systém tak, aby:

a) byl směrodatný pro klasifikaci
b) byl uchován největší rozptyl hodnot

Je třeba si uvědomit, že část informace byla nenávratně ztracena. V našem případě bychom pro potřeby rozdělení do tříd ukládali pouze osu X_1, ale to neznamená, že osa X_2 nemá žádnou informační hodnotu. Záleží na konkrétním využití, zda tuto informaci můžeme postrádat.



Obr. 9 - Příklad transformace prostoru příznaků a volby dominantního příznaku X_1



Obr. 10 - Projekce LDA a PCA v prostoru příznaků

LDA - zohledňuje pouze celkové rozložení dat, využívá informaci o třídě, (do které prvky náleží). Maximalizuje rozdíl mezi třídami a naopak minimalizuje rozdíl v rámci skupiny. Vhodné pro klasifikaci.

PCA - minimalizuje rozdíly mezi třídami a maximalizuje rozdíly v rámci skupiny. Vhodné např. pro kompresi dat

MARKOVOVY MODELY

(1865 – 1922) - Andrej Andrejevič Markov

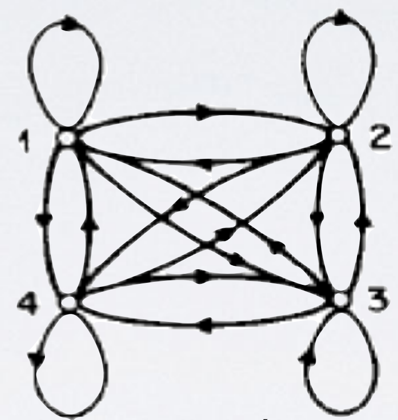
Pojem konečný stavový automat
Metoda pro detekci a vyhodnocení změn stavu systému popsaného pomocí pravděpodobnostního modelu. Předpokládá omezené podmínky pro změnu stavu konečného stavového automatu.

Markovův předpoklad – v teorii pravděpodobnosti je označen náhodný proces jako Markovův, pokud následující stav závisí pouze na nynějším stavu a nezávisí na stavech dřívějších.

Markovův proces – je stochastický proces, který má Markovovu vlastnost.

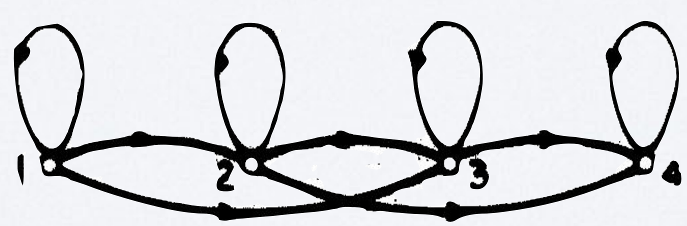
Markovovy modely (MM – Markov Models) – jsou modely s konečným počtem stavů, kde přechod mezi stavy je vyjádřen pravděpodobností. Mimo modely s diskrétním časem existují také modely se spojitým časem.

Ergodické – Všechny stavy jsou mezi sebou propojené přechody.



Obr. 11 - Příklad ergodického markovova modelu

Levo-pravé – v některých případech lze použít jednodušší model, kde nelze přecházet mezi všemi stavy, ale pouze mezi vedlejšími stavy v jednom směru. Tento model se používá např. při rozpoznávání řeči.

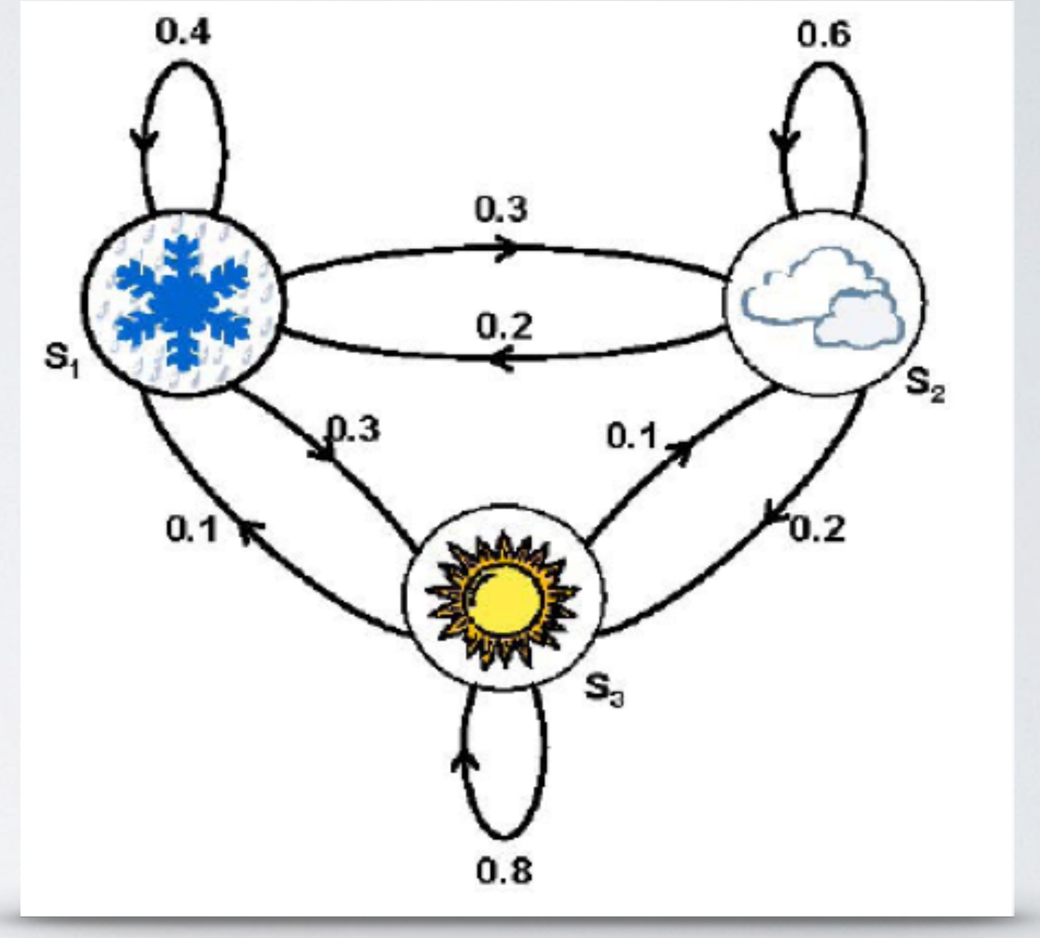


Obr. 12 - Příklad levo-pravého markovova modelu

Příklad: Model počasí

Vytvořme jednoduchý model počasí. Kterýkoliv den můžeme popsat jedním ze tří stavů:

- stav 1: deštivo
- stav 2: zataženo
- stav 3: slunečno



Obr. 13 - Model změny stavu počasí

Přechody mezi stavy lze popsat maticí přechodů s hodnotami pravděpodobnost:
(součet hodnot v řádku je rovna 1)

$$A = \{a_i\} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Základní možné výpočty (využitelné při klasifikaci):

Jaká je pravděpodobnost, že následujících osm dní bude tento průběh počasí: slunečno, slunečno, slunečno, deštivo, deštivo, slunečno, zataženo, slunečno?

Skryté Markovovy modely (HMM – Hidden Markov Models) – jsou Markovovy modely, kde některé stavy a přechody mezi nimi není možné pozorovat (tzv. skryté stavy a přechody).

Jde tedy o konečný stavový automat, který lze formálně zapsat jako:

$$\lambda = (N, M, A, B, \pi)$$

N – skryté stavy (vektor)
M – pozorovatelné stavy (vektor)
A – pravděpodobnosti přechodu mezi skrytými stavy (matice)
B – pravděpodobnosti přechodů k pozorovatelným stavům (matice)
π – počáteční pravděpodobnosti stavů (vektor)

DOTAZY?

LITERATURA, POUŽITÉ OBRÁZKY

[1] **Jan** J.: *Poznámky ke kurzu Digitální zpracování a analýza obrazového signálu*, FEKT 1999.

[2] **Jan** J., **Dub** P.: *Poznámky ke kurzu: Vyšší metody číslicového zpracování obrazu*, FEKT 2001.

[3] **Šonka** M., **Hlaváč** V.: *Počítačové vidění*, Computer press 1992, ISBN 80-85424-67-3

[4] **Hlaváč** V., **Sedláček** M.: *Zpracování signálů a obrazů*, skriptum ČVUT 2001.

[5] **Žára** J., **Beneš** B., **Felkel** P.: *Moderní počítačová grafika*, Computer press 2004, ISBN 80-251-0454-0.

[6] **Žára** J. a kol.: *Počítačová grafika - Principy a algoritmy*, Grada 1992, ISBN 80-85623-00-5.

[7] **Skala** V.: *Světlo, barvy a barevné systémy v počítačové grafice*; Academia 1993; ISBN 80-200-0463-7.

[8] **Wiley InterScience**: *Encyclopedia of Imaging Science and Technology*, http://www3.interscience.wiley.com

[9] **Pavlíčková**.: *Poznámky ke kurzu strojové učení*, FEKT 1998.

[10] **Hajda** J., **Čírtek** J.: *Markovovy modely, Skryté Markovovy modely*, FEKT 2005.

[11] **Krejčí** P., **Kučka** P.: *Diagonalizace a omezení dimenzí (PCA, LDA, HLDA)*, FEKT 2005.

[12] Wikipedia, *The free encyclopedia*, http://ww.wikipedia.org/

DĚKUJI ZA POZORNOST